Cours de physique générale I
pour étudiants en section d'Informatique

(automne 2025)

Dr. Stefano Rusponi
Laboratoire des nanostructures à la surface

Resumé

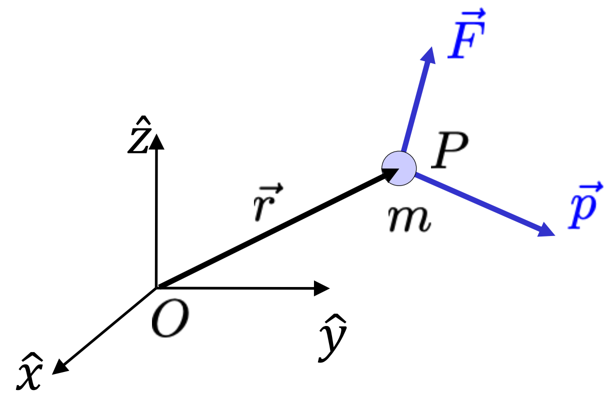
Site web du cours:

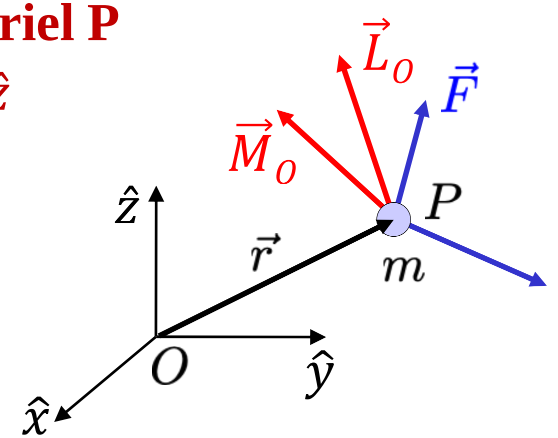
https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15445

Dynamique: équations du mouvement

pour un point matériel P

Référentiel $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$





$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

Résultante des forces:

$$\boxed{\vec{F} = \sum \vec{F}_i}$$

Moment de la résultante des force par rapport à un point O :

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i}$$

= 0 si force centrale

Quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Moment cinétique par rapport au point O :

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$$

2ème loi de Newton

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

équivalente à $\vec{F} = m\vec{a}$ si m constante

Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O}$$

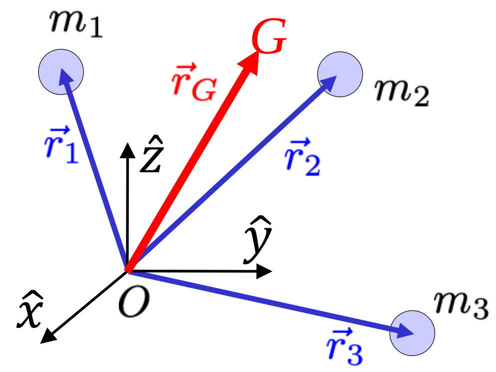
= 0 si force centrale

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

Dynamique: équations du mouvement

système (indéformable ou pas) de points matériels P_i

Référentiel $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$



Centre de masse G

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}$$

Résultante des forces $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

Moment de la résultante des force $\vec{M}_O$ par rapport à un point O :

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^{ext} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

Quantité de mouvement

$$\vec{p} = \sum_i m_i \, \vec{v}_i = M\vec{v}_G$$

Moment cinétique par rapport au point O :

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \wedge m\vec{v}_i = \vec{L}_G + \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G$$

2ème loi de Newton

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_G$$

Théorème du moment cinétique par rapport à O

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}$$

Lois de conservations

2ème loi de Newton

$$\boxed{\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_G}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F}^{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = const$$

Théorème du moment cinétique par rapport à O

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{M}_O^{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = const$$

Les lois de conservations peuvent être vérifiées que selon une direction $\hat{u}$

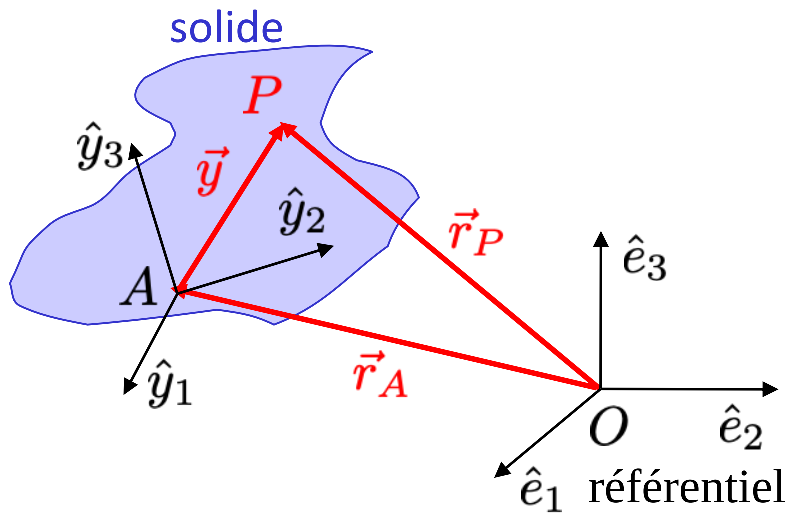
$$\vec{F}^{ext} \cdot \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} \cdot \hat{u} = const$$

$$\vec{M}_O^{ext} \cdot \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O \cdot \hat{u} = const$$

Dynamique: équations du mouvement

système (indéformable ou pas) de points matériels P_i

Référentiel $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$



Centre de masse G

$$\boxed{\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}}$$

Théorème du transfert: $$\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un point A quelconque:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} - \vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G}$$

Cas particuliers: $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext}$ si $\vec{v}_A = 0$

$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext}$ si $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_G$

$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext}$ si $A = G$

Tenseur d'inertie par rapport à un point A du solide

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_A + \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(\overrightarrow{AP_\alpha}\right)^2 \vec{\omega} - \left(\overrightarrow{AP_\alpha} \cdot \vec{\omega}\right) \overrightarrow{AP_\alpha} \right] = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_A + \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

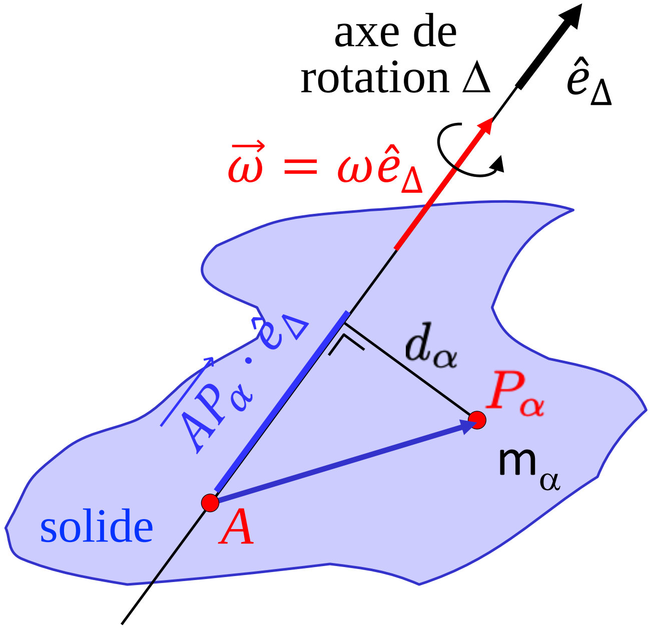
$\tilde{I}_A =$ tenseur d'inertie au point A d'éléments $\tilde{I}_{Aij}$
Matrice symétrique: $I_{Aij} = I_{Aji}$

$$\tilde{I}_A = \begin{pmatrix} I_{A11} & I_{A12} & I_{A13} \\ I_{A21} & I_{A22} & I_{A23} \\ I_{A31} & I_{A32} & I_{A33} \end{pmatrix} \neq \tilde{I}_G$$

Cas particuliers:

Si $\vec{v}_A = 0$ alors $\vec{L}_A = \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$

Si A = G alors $\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}$



- Si A est un point sur l'axe de rotation Δ:

$$L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \hat{e}_\Delta = \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} \cdot \hat{e}_\Delta = \omega \tilde{I}_A \cdot \hat{e}_\Delta \cdot \hat{e}_\Delta = \omega I_\Delta$$

$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$$

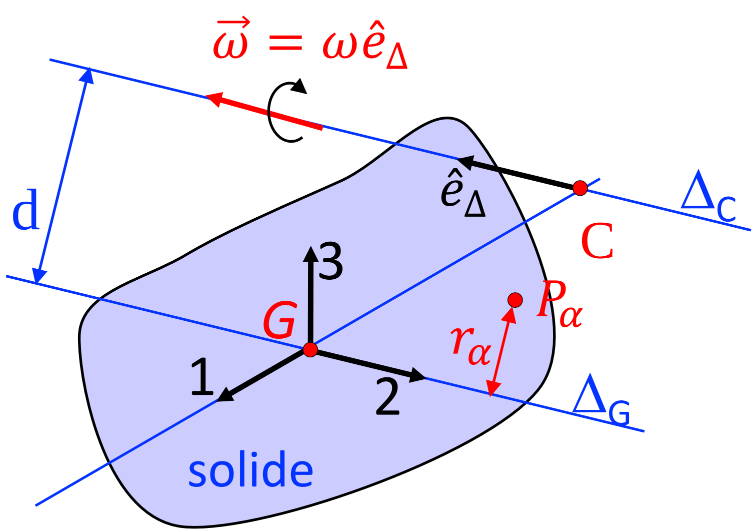
Axes principaux d'inertie et formule de Steiner

Pour tout point C d'un solide, il est toujours possible de choisir un repère orthonormé (Repère d'inertie) au point C tel que la matrice représentant le tenseur d'inertie soit diagonale :

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Moments d'inertie principaux : moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie, c-à-d les éléments diagonaux de $\tilde{I}_C$ dans le repère d'inertie

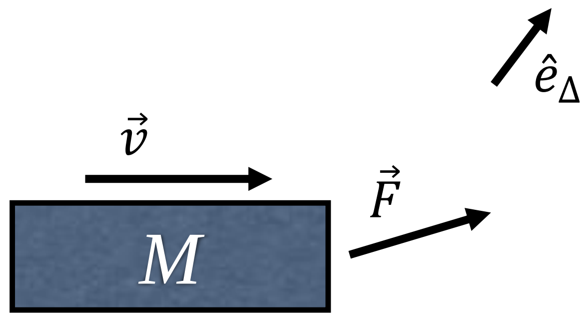
$$\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

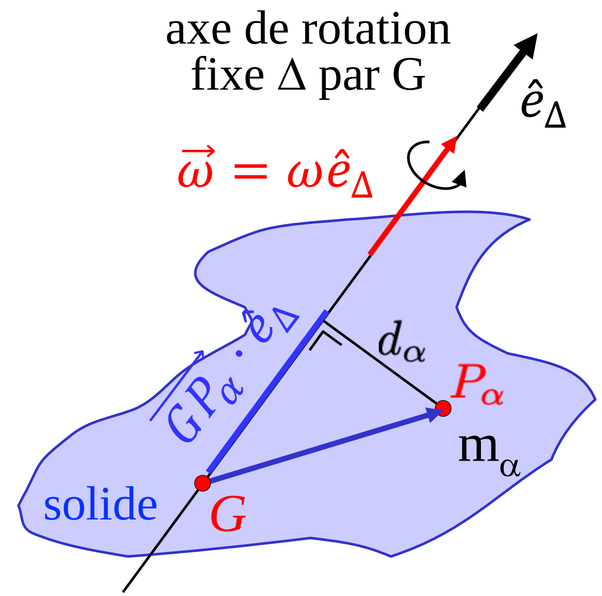


$$I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + md^2$$

Formule de Steiner

8.3 Masse (d'inertie) et moment d'inertie





2eme loi de Newton

$$F_\Delta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\Delta = M\vec{a}_G \cdot \hat{e}_\Delta = M\frac{d\vec{v}_G \cdot \hat{e}_\Delta}{dt}$$
$$= M\frac{dv_{G\Delta}}{dt}$$

$$L_\Delta = \vec{L}_G \cdot \hat{e}_\Delta = \omega \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2 = I_\Delta \omega$$

$$M_\Delta = \vec{M}_G \cdot \hat{e}_\Delta = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \hat{e}_\Delta = \frac{dL_G \cdot \hat{e}_\Delta}{dt} = \frac{dL_\Delta}{dt}$$
$$= I_\Delta \frac{d\omega}{dt}$$

La MASSE (inertielle ou d'inertie) mesure la résistance (inertie) qu'oppose le corps à toute accélération ou à toute modification de l'état de MOUVEMENT (RECTILIGNE)

La MOMENT D'INERTIE mesure la résistance qu'oppose le corps à toute modification de l'état de ROTATION.

Théorèmes de l’énergie

$$W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Travail de la force $\vec{F}$

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

***Théorème de l'énergie cinétique*:**
La variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la somme des forces

N.B.: Pour un solide indéformable

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

$$E = K + V(\vec{r}) = \text{ constante}$$

Théorème de l'énergie mécanique:
Pour des forces conservatives, l’énergie mécanique E est conservée

$$\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Energie cinétique d'un solide indéformable

- Pour un point A quelconque du solide:

$$\boxed{E_{cin} = K = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}}$$

Cas particuliers

- Si $\vec{v}_A = 0$ ⇨ $E_{cin} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \tilde{I}_{\Delta_A} \omega \hat{e}_\Delta = \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta_A} \omega^2$

- Si $A = G$ ⇨ $E_{cin} = \frac{1}{2} M v_g^2 + \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta_G} \omega^2$ ⇔ $K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2$

$M \vec{v}_G \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GG}\right) = 0$

$K^* = \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta_G} \omega^2$

2eme théorème de König

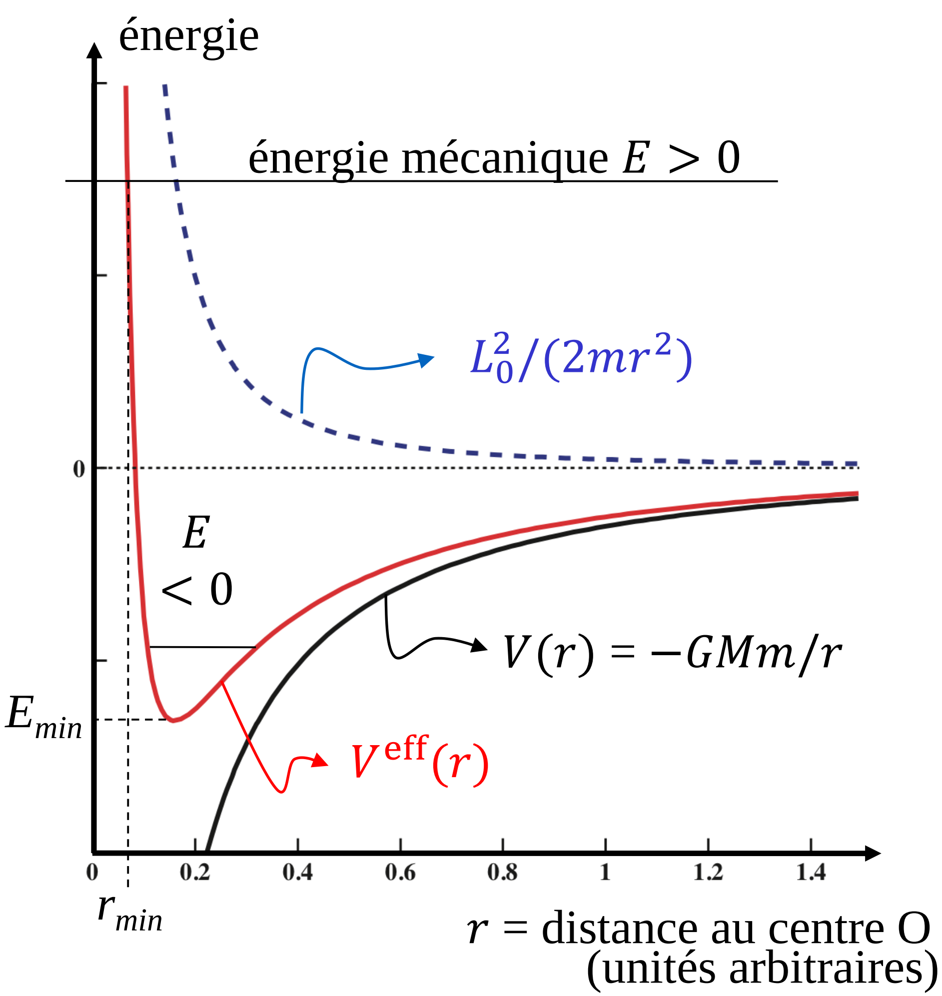
Force central conservative

$\boldsymbol{V(\vec{r}) = V(r)}$ **(potentiel central)** et $\vec{\boldsymbol{F}} = -\dfrac{\boldsymbol{dV(r)}}{\boldsymbol{dr}}\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r}}$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{{L_0}^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V^{eff}(r)$$

$$V^{eff}(r) = \frac{{L_0}^2}{2mr^2} + V(r)$$

Simplifié à un problème à une dimension !

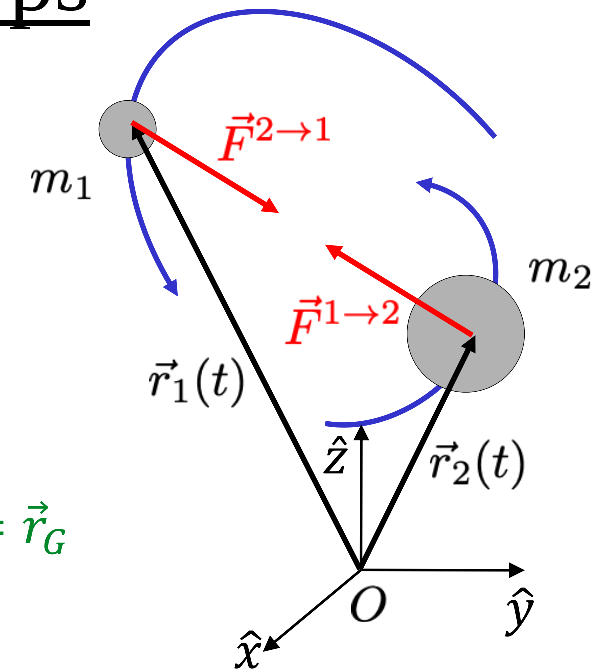


- Exemple:
  - Potentiel gravitationnel :
    $V(r) = -GMm/r$

- Deux type de trajectoires:
  - E < 0 -> état lié:
    - $E = E_{min}$ -> orbite circulaire
    - $E_{min} < E < 0$ -> orbite elliptique
  - E > 0 -> diffusion (r peut aller vers l'infini)
  - Les lois de conservation de L et E ne permettent pas au point matériel de s'approcher trop près du centre de force ($r > r_{\min}$)

7.6 System isolé à deux corps

Deux descriptions possible:



- Référentiel $(O\hat{x}\hat{y}\hat{z})$: coordonnées $\vec{r}_1$; $\vec{r}_2$

$$\begin{cases} \vec{F}_{2\to1} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 & (1) \\ \vec{F}_{1\to2} = m_2\ddot{\vec{r}}_2 & (2) \end{cases}$$

(3ème loi)

$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}$$

- Référentiel du centre de masse $(G\hat{x}\hat{y}\hat{z})$: coordonnées $\vec{r}$; $\vec{R} = \vec{r}_G$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

(1) Théorème du centre de masse $\Leftrightarrow$ $(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{2\to1}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{1\to2}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{2\to1} = (\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2})\vec{F}_{2\to1}$$

$$\Downarrow$$

(2) Equation du mouvement relatif $\vec{F}_{2\to1} = \mu\ddot{\vec{r}}$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M}$$

μ = masse réduite du système

$$M = m_1 + m_2$$

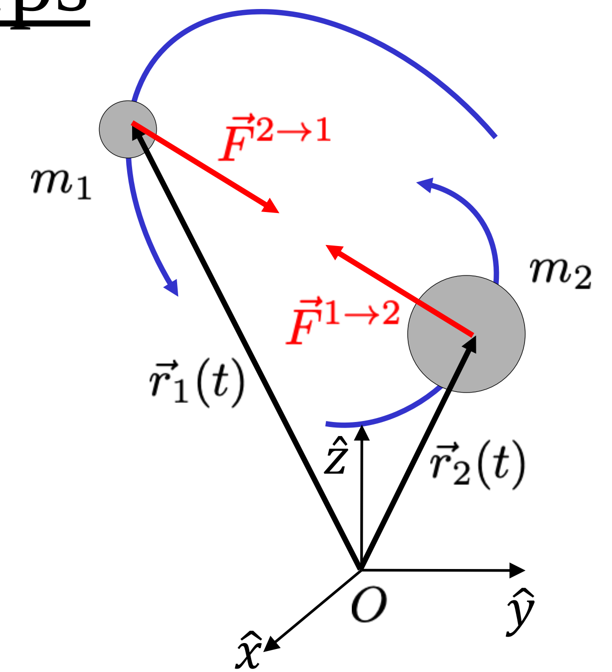
M = masse totale du système

7.6 System isolé à deux corps

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext} = 0 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

$$\vec{F}_{2\to 1} = \mu\ddot{\vec{r}}$$

$$M = m_1 + m_2$$



Equivalente à étudier le mouvement de deux particules indépendantes de masse M et μ

$\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont obtenus à partir de $\vec{r}$ et $\vec{R}$

$$(m_1 + m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \qquad (m_1 + m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_1 - \vec{r})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$$

Collisions entre deux corps

- Peuvent être analysés sur la base des lois de conservation et permettent d'étudier les forces en jeu

- Modélisation: le système des deux corps est isolé ou partiellement isolé

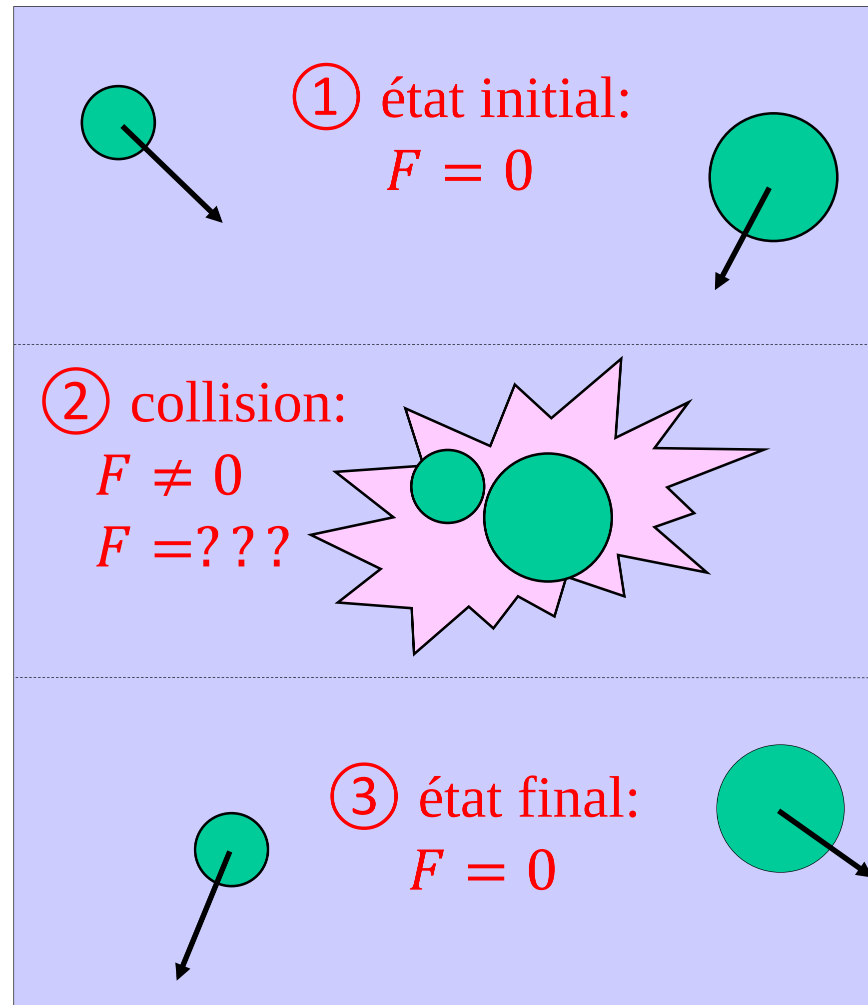
$\vec{p} \cdot \hat{u}$ = constante

$\vec{L}_O \cdot \hat{u}$ = constante

(1) Bien avant le choc ($t \ll 0$):
- Les corps n'exercent aucune force l'un sur l'autre (ils sont très éloignés et on suppose une force à courte portée)
- Chaque corps est un système isolé

(2) Pendant le choc ($t \simeq 0$):
- Les corps interagissent, sous l'effet d'une force F (qu'on ne décrit pas)

(3) Bien après le choc ($t \gg 0$):
- Les corps sont à nouveau libres



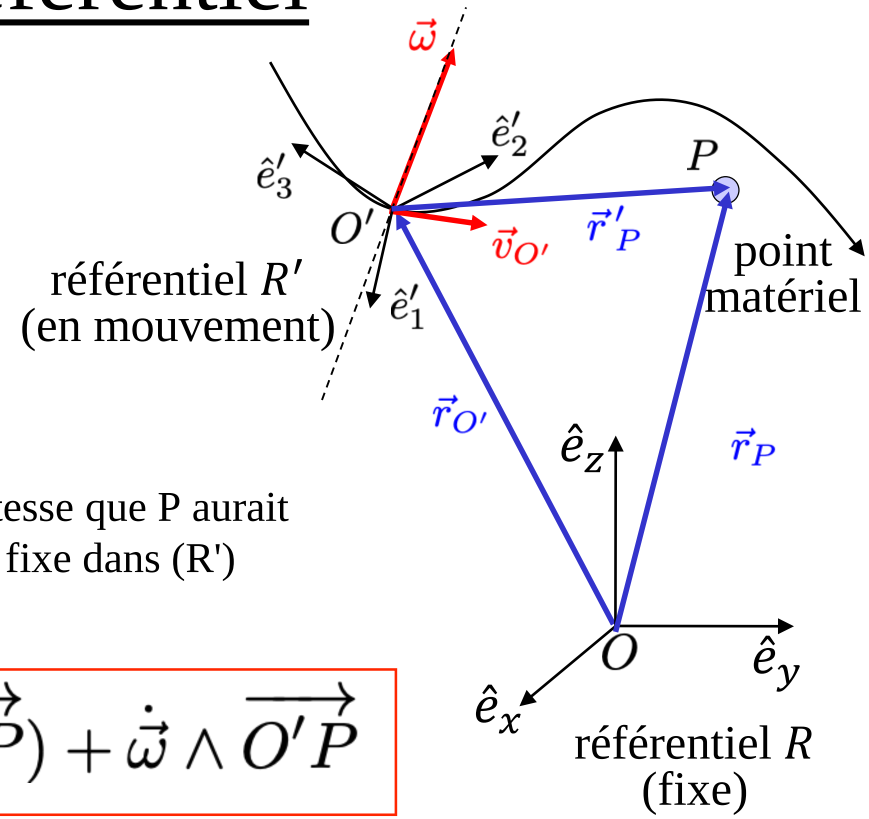
état initial ≠ état final: les corps ont échangé, entre autres, de la quantité de mouvement:

$$\Delta\vec{p} = \int_{\text{choc}} \vec{F} dt = \text{impulsion}$$

démo: mesure de la durée d'un choc

Changement de référentiel

$\vec{\omega}$:vitesse angulaire de rotation du référentiel $O'\hat{e}_1'\hat{e}_2'\hat{e}_3'$ par rapport au référentiel $O\hat{e}_x\hat{e}_y\hat{e}_z$ (comme si O et O' coïncidaient)



$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \underbrace{\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}}}$$

vitesse d'entraînement: vitesse que P aurait par rapport à (R) s'il était fixe dans (R')

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}}$$

Dans un référentiel R' accéléré par rapport à R, on a:

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} \overbrace{- \left(2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)}^{\sum \vec{F}^{inertie}}$$

force de Coriolis

force centrifuge

La méthode scientifique vs. programmation

Méthode scientifique:
- **Analyse:** Identification d'un problème ou d'une question.
- **Theorie:** Formulation d'une explication possible.
- **Prediction:** Conception d'expériences pour tester l'hypothèse.
- **Experience:** Réalisation et interprétation des résultats de l'expérience.

Très similaires

Informatique:
- **Analyse:** Définition du problème à résoudre.
- **Conception:** Élaboration d'un algorithme pour résoudre le problème.
- **Codage:** Traduction de l'algorithme en un langage de programmation.
- **Test:** Exécution du code pour vérifier son fonctionnement et corriger les erreurs.

Il faut apprendre la méthode scientifique
pour résoudre n'importe quel type de problème

La mécanique (qui décrit notre quotidien) est le meilleur exercice

Examen

Vendredi 16 Janvier 2025 de 09h15 à 12h45

- **Travail individuel en silence, totalement dédié, sans interaction avec une autre personne**

- **Matériel autorisé: papier vierge, stylos, crayons, gomme, règle, taille-crayon**

- **Formulaire officielle sur Moodle (les formules sur ce formulaire n'ont pas besoin d'être démontrées)**

- **Formulaire personnel manuscrit de 1 pages A4 (= 1 feuille A4 recto) pour votre souvenir (les formules sur ce formulaire <u>doivent</u> être démontrées)**